



Facultad de Matemáticas

Departamento de Geometría y Topología

TRABAJO FIN DE GRADO

---

# TEOREMAS DE RAMSEY

---

**Ana María Roldán Quintana**



Facultad de Matemáticas  
Departamento de Geometría y Topología  
TRABAJO FIN DE GRADO

---

# TEOREMAS DE RAMSEY

---

**Ana María Roldán Quintana**

La Profesora Tutora:

Fdo: **María Trinidad Villar Liñán**  
Profesora Titular de Universidad  
Dpto. de Geometría y Topología  
Universidad de Sevilla

Fdo: **Ana María Roldán Quintana**

Sevilla, Junio 2018



*A mi padre y a mi madre.*



## **AGRADECIMIENTOS**

A mis padres José Miguel Roldán Pérez y Encarnación Quintana Burgos por todo su esfuerzo, trabajo y dedicación para otorgarme la oportunidad de hacer un sueño realidad y ofrecerme un futuro de vida.

En particular, a mi padre por motivarme a iniciar este Grado, por confiar que podría conseguirlo cuando yo no lo creía y por apoyarme en este camino, sé que estaría orgulloso. Y a mi madre por levantarme cuando me he caído, por enseñarme a superar cada obstáculo, por su apoyo incondicional y por su cariño. Por todo ello ha sido y es un pilar fundamental e imprescindible en mi vida, un ejemplo a seguir para mi.

A mis hermanos por animarme a superarme cada vez más y hacer más llevaderos momentos difíciles, en especial a mi hermana mayor, María Reyes, por compartir profesión y por los impulsos oportunos que me hacían seguir avanzando cuando perdía velocidad.

También a mi pareja por la paciencia derrochada a lo largo de todos estos años, por su comprensión y por apoyarme en los momentos más difíciles.

Y por supuesto a María Trinidad Villar Liñán, mi tutora en este Trabajo de Fin de Grado, por todo lo que me ha enseñado y ayudado ante todas las dificultades que se han presentado durante la elaboración de este proyecto.

Muchas gracias a todos.





## RESUMEN

En este Trabajo Fin de Grado estudiaremos la Teoría de Ramsey, la cual afirma que, en general, en sistemas suficientemente grandes siempre existen subsistemas no pequeños con estructura, con orden.

Estudiaremos el cálculo de los Números de Ramsey en grafos simples, para ello veremos algunas propiedades de los Números básicos de Ramsey para dos colores y calcularemos algunos Números de Ramsey no triviales conocidos hasta el momento.

Un ejemplo de Número de Ramsey es un entero, denotado como  $r = R(p, q)$  con  $p$  y  $q$  números enteros, tal que cualquier coloración con dos colores (azul y rojo) posible de las aristas del grafo completo  $K_r$  contenga un subgrafo  $K_p$  cuyas aristas estén coloreadas de azul o bien  $K_q$  con todas sus aristas rojas.

Distinguiremos tres versiones diferentes del Teorema de Ramsey: Versión original de Ramsey, versión de Erdős y Szekeres y la versión de Diestel.

Y finalmente veremos las aplicaciones que tienen estos resultados de Ramsey en distintas áreas de las Matemáticas, no sólo en la Teoría de Grafos.



## ABSTRACT

In this Grade Final Project we will study Ramsey's Theory, which states that, in general, in sufficiently large systems there are always non-small subsystems with structure, with order.

We will study the Ramsey Numbers for simple graphs, for this we will see some properties of the Ramsey basic Numbers for two colors and we will compute some non-trivial Ramsey Numbers known so far.

An example of a Ramsey Number is an integer, denoted as  $r = R(p, q)$  with  $p$  and  $q$  integer numbers, such that any possible coloring with two colors (blue and red) of the edges of the complete graph  $K_r$  contains a  $K_p$  subgraph whose edges are colored blue or  $K_q$  whose edges are colored red.

We will distinguish three different versions of Ramsey's Theorem: original version given by Ramsey, Erdős and Szekeres' statement and the alternative proof introduced by Diestel.

Finally we will see some implications of these Ramsey results in different areas of Mathematics, not only in Graph Theory.



# Índice general

<b>Introducción</b>	<b>15</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>19</b>
<b>2. Números de Ramsey en grafos simples</b>	<b>25</b>
2.1. Propiedades de los Números de Ramsey. . . . .	26
2.2. Número de Ramsey $R(3, 3) = 6$ . . . . .	29
2.3. Número de Ramsey $R(3, 4) = 9$ . . . . .	31
2.4. Número de Ramsey $R(3, 5) = 14$ . . . . .	33
2.5. Número de Ramsey $R(3,3,3)=17$ . . . . .	35
<b>3. Versiones del Teorema de Ramsey</b>	<b>39</b>
3.1. Versión original del Teorema de Ramsey . . . . .	39
3.2. Prueba según Erdős y Szekeres . . . . .	40
3.3. Prueba del Teorema de Ramsey según Diestel . . . . .	43
<b>4. Aplicaciones del Teorema de Ramsey</b>	<b>45</b>
4.1. Teorema de Erdős y Szekeres sobre los polígonos convexos. . . .	45
4.2. Teorema de Schur . . . . .	48
4.3. Aplicaciones del teorema de Ramsey. . . . .	50
4.4. Otras aplicaciones . . . . .	51
4.4.1. Teorema de van der Waerden . . . . .	51
4.4.2. Erdős y Szekeres . . . . .	51
4.4.3. Aplicación de Ramsey para matrices. . . . .	52
4.4.4. Número de Ramsey de dos colores para ciclos . . . . .	52



# INTRODUCCIÓN

Entre los problemas más relevantes de la Matemática Discreta podemos encontrar los de la Teoría Extremal de Grafos y dentro de ésta se hallan los problemas de cálculo de *Números de Ramsey*.

De manera intuitiva y a grandes rasgos, el Teorema de Ramsey puede interpretarse como una formulación matemática de búsqueda del orden dentro del caos. Este popular teorema establece que fijada una cierta configuración de elementos, siempre es posible encontrar un conjunto suficientemente grande que contenga un subconjunto con dicha configuración.

Más formalmente, en [13] encontramos un enunciado equivalente a este: *Dados unos enteros positivos  $r, p_1, \dots, p_t$ , existe un número  $R(p_1, \dots, p_t, r)$  tal que si un conjunto  $A$  tiene al menos  $R(p_1, \dots, p_t, r)$  elementos y coloreamos los  $r$ -subconjuntos de  $A$  con  $t$  colores, entonces existen un  $i$  y un  $p_i$ -subconjunto tal que todos sus  $r$ -subconjuntos son del color  $i$ .*

El nacimiento de la Teoría de Ramsey se podría fechar hacia el primer tercio del Siglo XX cuando Frank Plumpton Ramsey demuestra este resultado conjuntista dentro de un trabajo enmarcado en el área de la Lógica Formal, [13]. Cobra un especial auge cuando, en un trabajo posterior, Paul Erdős y Georges Szekeres enuncian una versión de dicho resultado para dos colores así como una tercera versión desde el punto de vista de la Teoría de Grafos. De esta forma, Erdős y Szekeres son considerados los verdaderos impulsores de la Teoría de Ramsey en lugar de ser el propio Ramsey el que la desarrollara.

Desde entonces, los problemas de la Teoría de Ramsey como tal han dado lugar a un área de investigación que se puede calificar como muy viva dado que siguen surgiendo tanto problemas abiertos como mejoras de los resultados ya establecidos (véase [12], [15]).

Aunque habitualmente hablemos de “el Teorema de Ramsey” en singular, esto no debe interpretarse como que hay un único teorema, sino más bien como una familia de resultados en la que se engloban distintas versiones del resultado primitivo y que han ido apareciendo a lo largo del tiempo según distintos enfoques: conjuntista, combinatorial o numérico. Dentro de cada enfoque también hay versiones atendiendo a los parámetros que entran en juego: los órdenes de las

combinaciones y el número de colores.

En el marco de la Teoría de Grafos, suele ser  $r = 2$ , así los 2-subconjuntos son las aristas de un grafo y los  $p_i$ -subconjuntos son grafos completos de orden  $p_i$ . El problema consiste entonces en encontrar el mínimo orden  $N$  de un grafo completo tal que cualquier coloración de sus aristas con  $t$  colores produzca un subgrafo completo monocromático de orden  $p_i$ , para algún  $i$ . Además, existen numerosos resultados en los que en vez de considerar subgrafos completos monocromáticos se consideran otros grafos con cierta regularidad, como los ciclos o los caminos, entre otros [15].

En este contexto, el objetivo de este Trabajo Fin de Grado es triple: realizar un estudio de los trabajos originales que dieron lugar a la Teoría de Ramsey tal como es conocida hoy en día ([13] y [7]); aplicar técnicas clásicas de cálculo de algunos Números de Ramsey, y posteriormente aplicar estos resultados a la resolución de problemas de otras áreas Matemáticas.

Este trabajo se divide en 4 capítulos. Seguido de esta Introducción, en el Capítulo 1 definimos algunas nociones y resultados de la Teoría de Grafos y la Combinatoria necesarios para hacer una lectura cómoda de los capítulos posteriores.

En el Capítulo 2 presentamos el Teorema de Ramsey para grafos simples y calculamos explícitamente los Números de Ramsey para dos colores  $R(3, 3)$ ,  $R(3, 4)$  y  $R(3, 5)$  así como el Número de Ramsey para 3 colores  $R(3, 3, 3)$ . Tanto con estos ejemplos como con los resultados recogidos en este capítulo queda puesta de manifiesto la dificultad que entraña el cálculo de los Números de Ramsey para  $t$  colores,  $R(p_1, \dots, p_t)$ , a medida que crecen los valores de  $t$  y de  $p_i$  ( $1 \leq i \leq t$ ). Este capítulo no tendría razón de ser si no se tuviera demostrada la existencia de los Números de Ramsey para valores enteros positivos cualesquiera  $t$  y  $p_1, \dots, p_t$  y este es el motivo de la inclusión del contenido del capítulo siguiente.

El Capítulo 3 se dedica al estudio de distintas versiones del Teorema de Ramsey, presentadas por orden cronológico de publicación comenzando por los resultados originales de F. P. Ramsey [13], continuando por las versiones combinatoriales de P. Erdős y G. Szekeres, para terminar con una demostración alternativa dada por R. Diestel [6]. Hemos realizado una traducción lo más fiel posible de los trabajos primitivos pero utilizando un lenguaje algo más próximo al formalismo matemático actual. No obstante, la terminología se ha cambiado lo mínimo, sólo cuando era estrictamente necesario.

Seguidamente, en el Capítulo 4 abordamos distintas aplicaciones del Teorema de Ramsey a problemas no directamente vinculados al ámbito de la Teoría de Grafos. Así, recogemos el problema de Erdős y Szekeres para polígonos convexos en el plano. Presentamos un ejemplo de cálculo del Número de Schur para varios colores, vinculado al estudio de las Ecuaciones Diofánticas. Demostramos que todo semigrupo finito tiene un elemento idempotente, basándonos en el Teorema de Ramsey para grafos simples. Finalmente, se muestran otros resultados clásicos



que admiten una demostración usando el Teorema de Ramsey en alguna de sus versiones.

Como observación final, queremos mencionar que el Teorema de Ramsey sólo se presenta en su versión más elemental para grafos simples, dos colores y  $p_1 = p_2 = 3$ , como un ejemplo de aplicación del Principio del Palomar, en la asignatura Matemática Discreta (de primer curso del Grado en Matemáticas). Hasta donde conocemos, durante los estudios de este Grado, el Teorema de Ramsey no se halla recogido entre los descriptores de las asignaturas del plan de estudios actual. En este sentido, la realización de este proyecto nos parece un modo muy adecuado de abordar y ampliar conocimientos de Matemática Discreta, profundizando en un tema tan amplio como es el de la Teoría de Ramsey. No obstante, el contenido de esta memoria resulta ser una muestra del extenso campo de estudio que abarca esta Teoría y que se justifica con la numerosa bibliografía especializada de la cual sólo hemos podido consultar una pequeña cantidad de ejemplares.



# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo introductorio vamos a definir los conceptos básicos de Teoría de Grafos y Combinatoria que usaremos a lo largo de todo el trabajo siguiendo [1], [10] y [2].

Se denomina **grafo simple** a todo par  $G = (V, A)$ , donde  $V$  es un conjunto finito no vacío y  $A$  es un conjunto (que puede ser vacío) formado por 2-subconjuntos de elementos distintos de  $V$ . Los elementos de  $V$  se llaman **vértices** o **nodos** del grafo  $G$  y los elementos de  $A$  son las **aristas** de  $G$ . También se denota  $V = V(G)$  y  $A = A(G)$ .

**Notación abreviada de arista:** Si  $a$  es una arista de vértices  $v_1$  y  $v_2$ , escribiremos  $a = v_1v_2$ , donde  $v_1$  y  $v_2$  también se llaman extremos de  $a$ .

Se denomina **orden** de un grafo al número de vértices que posee dicho grafo, denotado como  $|V|$  y **tamaño** de un grafo al número de aristas que posee, denotado como  $|A|$ .

Sea  $a = v_1v_2$ , diremos entonces que los **vértices**  $v_1$  y  $v_2$  son **adyacentes** ó que  $a$  es **incidente** con los vértices  $v_1$  y  $v_2$ . Dos aristas son **incidentes** si tienen un vértice en común.

Se llama **conjunto independiente** de un grafo  $G$  a un conjunto de vértices de dicho grafo tal que no hay adyacencias entre ellos en  $G$ .

Se denomina **grado de un vértice**  $v$  o bien al número de vértices adyacentes con él o bien al número de aristas incidentes con él.

El grado de un vértice se representa por  $d(v)$ .

Llamamos **subgrafo** de  $G = (V, A)$  a otro grafo  $G' = (V', A')$  tal que se cumple que  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq A$ .

Diremos que  $G' = (V', A')$  es un **subgrafo inducido** de  $G = (V, A)$  para un conjunto de vértices  $V' \subseteq V$  si se cumple que si  $v, w \in V'$  y  $vw \in A$ , entonces  $vw \in A'$ . Es decir,  $G'$  tiene como conjunto de vértices a un cierto subconjunto  $V'$  de los vértices de  $G$ ; y como conjunto de aristas, a todas aquellas de  $G$  cuyos extremos sean vértices de  $V'$ .

A continuación veamos un ejemplo que recoge alguna de las definiciones anteriores:

**Ejemplo 1.**  $G = (V, A)$ ,  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ ,  $A = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_4v_1, v_4v_2\}$

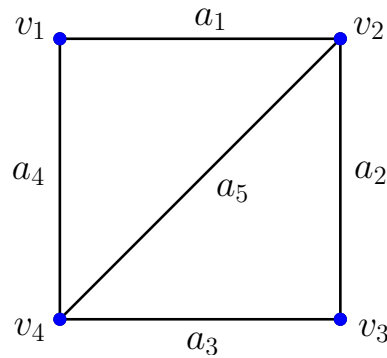


Figura 1.1: Grafo  $G$ .

*Orden del grafo:*  $|V| = 4$

*Tamaño del grafo:*  $|A| = 5$

*Grado del vértice  $v_2$ :*  $d(v_2) = 3$

*Un subgrafo de  $G$  es:*  $G' = \{v_4v_2, v_2v_3, v_3v_4\}$

*Vértices adyacentes a  $v_1$ :*  $\{v_2, v_4\}$

*Aristas incidentes a  $v_1$ :*  $\{a_1, a_4\}$

Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Una **coloración de aristas** ó **n-coloración de aristas** de  $G$  es una aplicación  $C : A \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}$ . Se dice que  $G$  es **n-coloreable** si  $G$  admite una  $n$ -coloración. En todo lo que sigue, se dirá que  $G$  está  $n$ -coloreado si se ha definido sobre  $G$  una  $n$ -coloración de sus aristas.

Se denomina **subgrafo monocromático** de  $G = (V, A)$  a otro grafo  $G' = (V', A')$ , con  $V' \subseteq V$  y  $A' \subseteq A$ , el cual está coloreado por un solo color.

Sea  $G = (V, A)$  un grafo. Se denomina **grafo complementario** de  $G$  y se representa por  $\bar{G} = (V, A')$  a otro grafo cuyo conjunto de vértices es el mismo que el del grafo  $G$ . La arista  $uv \in A'$  si y solo si  $uv \notin A$ .

### Ejemplo 2.

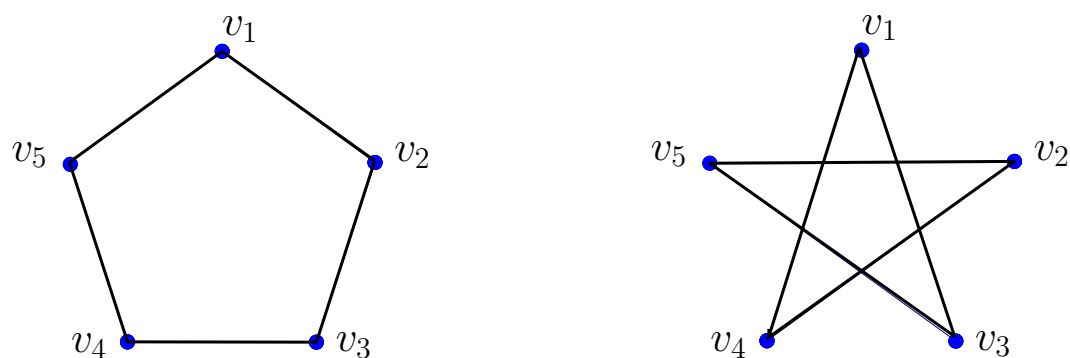
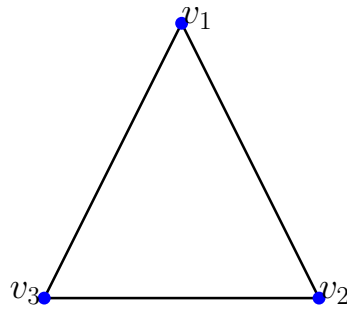


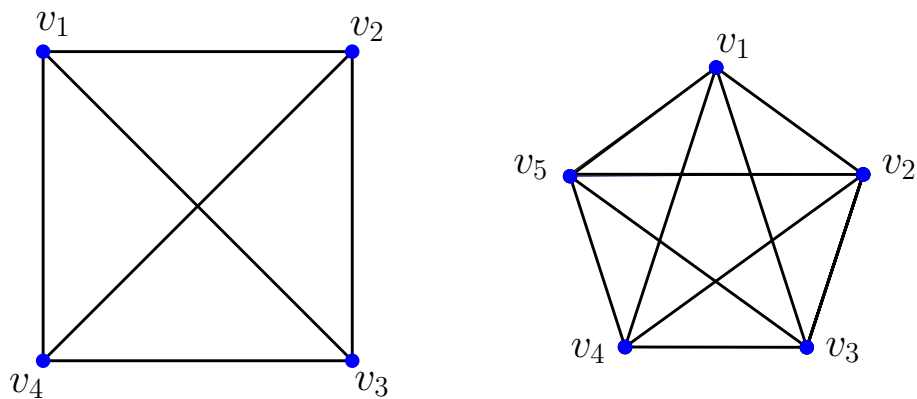
Figura 1.2: Grafo  $G$  y grafo  $\bar{G}$ .

Un grafo se dice **regular** si todos sus vértices tienen el mismo grado.

**Ejemplo 3.**Figura 1.3: Grafo  $K_3$ .

$$d(v_i) = 2 \quad \forall i = 1, 2, 3.$$

Se denomina **grafo completo** de orden  $n$  y se representa por  $K_n$  a todo grafo regular de  $n$  vértices tales que cada uno de ellos tiene grado  $n - 1$ , es decir, es aquel grafo que tiene todas las aristas posibles entre sus vértices.

**Ejemplo 4.**Figura 1.4: Grafo completo  $K_4$  y grafo completo  $K_5$ 

Un  **$p$ -subconjunto** es un subconjunto de  $p$  elementos.

Llamamos **ciclo** al grafo definido por los vértices y las aristas de una línea poligonal cerrada. Obsérvese que es un grafo regular de grado 2.

Un resultado importante y del que haremos uso será el Lema del apretón de manos, antes de enunciarlo consideremos el siguiente lema:

**Lema 1.0.1.** *La suma de los grados de un grafo  $G(V, A)$  es igual al doble del número de aristas:  $\sum_{v \in V} d(v) = 2|A|$ .*

Como consecuencia obtenemos el siguiente Lema.

**Lema 1.0.2** (Lema del apretón de manos). *En un grafo  $G = (V, A)$ , el número de vértices de grado impar es par o cero.*

Continuamos definiendo algunas nociones de Combinatoria.

Una **combinación de orden k o k-combinación** de  $n$  objetos ( $k \leq n$ ) es un conjunto de  $k$  objetos distintos elegidos entre  $n$  objetos dados sin importar el orden. También se suele llamar **combinación** de  $n$  objetos tomados de  $k$  en  $k$ .

Otro resultado importante y del que también haremos uso es el **Principio de distribución de Dirchlet** también conocido como **Principio del Palomar**, el cual dice:

**Teorema 1.0.3** (Principio del Palomar). *Si tenemos  $n$  nidos y  $n + 1$  palomas, entonces hay un nido en el que duermen al menos dos palomas.*

Un principio tan sencillo puede ayudarnos a la hora de resolver algunos problemas de apariencia complicada. Por supuesto, la dificultad suele estar en "identificar" los nidos y las palomas.

Este principio se puede generalizar:

**Teorema 1.0.4.** *Si tenemos  $m$  palomas y  $n$  nidos tal que  $m > n$ , al colocar las palomas en los nidos, entonces, existirá al menos un nido que contiene como mínimo*

$$\lceil m/n \rceil$$

*palomas. Existirá otro nido que contendrá un máximo de palomas igual a*

$$\lfloor m/n \rfloor$$

donde  $\lfloor m/n \rfloor$  es la parte entera de  $m/n$  y  $\lceil m/n \rceil = \lfloor m/n \rfloor + 1$ .



## Capítulo 2

# Números de Ramsey en grafos simples

En este capítulo vamos a estudiar algunos números de Ramsey siguiendo [4],[8],[14] y [9]. Una vez garantizada la existencia de dichos números calcularemos explícitamente algunos de ellos mientras que para otros daremos cotas de su valor.

Dados unos enteros  $p$  y  $q$ , ¿existe un entero  $r = R(p, q)$  para el que cualquier coloración con dos colores (por ejemplo azul y rojo) posible de las aristas del grafo  $K_r$  contenga un subgrafo  $K_p$  cuyas aristas estén todas coloreadas de azul o bien un subgrafo  $K_q$  con todas sus aristas rojas.?

Podemos considerar un número mayor de colores,  $m \geq 2$ , y dados unos enteros  $p_1, \dots, p_m$ , plantearemos el problema de encontrar el mínimo entero  $R(p_1, \dots, p_m)$  para el que cualquier coloración con esos  $m$  colores de las aristas del grafo completo con  $R(p_1, \dots, p_m)$  contenga un subgrafo completo  $K_{p_1}$  del primer color o un subgrafo completo  $K_{p_2}$  del segundo, y así sucesivamente. Lo que Ramsey probó es que estos problemas tienen solución.

Enunciemos a continuación el Teorema de Ramsey en su versión combinatorial y cuya prueba se recoge en [13]. En el Capítulo 3, en el **Teorema 3.2.1**, se demuestra la versión para  $m = 2$  colores.

**Teorema 2.0.1** (Teorema de Ramsey [13]). *Dados unos enteros  $p_1, \dots, p_m$ , existe un entero  $N$  tal que si un conjunto tiene al menos  $N$  elementos y coloreamos los 2-subconjuntos de ese conjunto con  $m$  colores, entonces existe un  $i$  y un  $p_i$ -subconjunto tal que todos sus 2-subconjuntos tienen color  $i$ .*

**Definición 2.0.2.** Llamaremos **número de Ramsey**  $R(p_1, \dots, p_m)$  al mínimo entero  $N$  que cumpla las condiciones del **Teorema 2.0.1**.

En términos de coloraciones de grafos,  $R(p_1, \dots, p_m)$  es el mínimo entero  $N$  tal que un grafo completo con al menos  $N$  vértices verifica que cualquier coloración de sus aristas con  $m$  colores contiene un subgrafo  $K_{p_i}$  monocromático (para algún color  $i$ ).

En particular  $R(p, q)$  es el menor número de vértices que debe tener un grafo completo 2-coloreado con azul y rojo para que o bien tenga un subgrafo  $K_p$  azul ó bien tenga un subgrafo  $K_q$  rojo.

Equivalentemente,  $R(p, q)$  es el menor número de vértices que debe tener un grafo  $G$  para que o bien contenga a  $K_p$  como subgrafo o bien su complementario  $\bar{G}$  contenga a  $K_q$  como subgrafo.

Nótese que  $\bar{G}$  contiene a  $K_q$  como subgrafo si y solo si  $G$  contiene un conjunto independiente de tamaño  $q$ .

Tras garantizar la existencia de los números de Ramsey procedemos a estudiar sus propiedades elementales y posteriormente a calcularlos explícitamente o, al menos, obtener cotas para su tamaño.

## 2.1. Propiedades de los Números de Ramsey para 2 colores.

Sin pérdida de generalidad supondremos en lo que sigue que, en el número de Ramsey,  $R(p, q)$ , el primer color es azul y el segundo rojo, de modo que en  $R(p, q)$ ,  $p$  es el número de vértices del posible subgrafo completo azul y  $q$  el número de vértices del posible subgrafo completo rojo.

**Proposición 2.1.1.** Para los números de Ramsey básicos,  $R(p, q)$ , se cumple que:

1.  $R(p, q) = R(q, p)$

*Demostración.* Desde el punto de vista de la coloración de aristas, consideremos que un grafo completo  $G$  2-coloreado tendrá un grafo completo inversamente 2-coloreado  $G'$ , donde cualquier arista roja en  $G$  tendrá color azul en  $G'$  y cualquier arista azul en  $G$  tendrá un color rojo en  $G'$ . Sabemos que  $R(p, q)$  indica que cualquier coloración de arista de  $K_{R(p, q)}$  contiene un subgrafo monocromático azul  $K_p$  o un subgrafo monocromático rojo  $K_q$ , lo que también significa que el grafo inversamente coloreado  $K'_{R(p, q)}$  contiene un subgrafo monocromático rojo  $K_p$  o un subgrafo monocromático azul  $K_q$ . Al igual que ocurre con  $R(q, p)$ .  $\square$

$$2. R(1, q) = 1$$

*Demostración.* Un  $K_1$  monocromático es simplemente un único vértice, que no requiere aristas y, por lo tanto, un  $K_1$  monocromático rojo o azul simplemente requerirá un vértice para satisfacer las condiciones de  $R(1, q)$  ó  $R(q, 1)$ . Por lo tanto, todos los números de Ramsey con  $p = 1$  ó  $q = 1$  necesitarán un solo vértice para garantizar la existencia de uno de sus dos subgrafos requeridos.  $\square$

$$3. R(2, q) = q, \text{ si } q \geq 2$$

*Demostración.* Si coloreamos las aristas de  $K_q$  de rojo y azul entonces o bien todas las aristas son rojas o bien al menos una arista es azul. En el primer caso, hay un  $K_q$  rojo y en el segundo caso, hay un  $K_2$  azul. Luego,  $R(2, q) \leq q$ . Veamos que se da la igualdad. Si  $R(2, q) = r < q$ , la coloración rojo-azul que consiste en colorear todas las aristas con azul no contiene ningún  $K_q$  rojo ni ningún  $K_2$  azul.  $\square$

Por tanto los números de Ramsey  $R(p, q)$  no triviales son aquellos para los que  $p \geq 3$  y  $q \geq 3$ .

Para obtener **cotas superiores**, empecemos probando el siguiente Teorema.

**Teorema 2.1.2.**

1. Para cualesquiera enteros  $p, q \geq 2$

$$R(p, q) \leq R(p-1, q) + R(p, q-1)$$

2. Si los números  $R(p-1, q)$  y  $R(p, q-1)$  son pares, la desigualdad anterior es estricta.

*Demostración.*

1. Llamemos  $r = R(p, q - 1) + R(p - 1, q)$  y coloreemos las aristas de un grafo completo  $K_r$  con dos colores. Probemos que existe un  $K_p$  azul o un  $K_q$  rojo. Para ello, fijemos un vértice  $v \in K_r$  y consideremos sus  $r - 1$  aristas. Hay un cierto número de ellas azules y otras rojas. Como  $r - 1 = R(p, q - 1) + R(p - 1, q) - 1$ , el Principio del Palomar (Teorema 1.0.4) nos dice que hay al menos  $R(p - 1, q)$  aristas azules o bien al menos  $R(p, q - 1)$  aristas rojas incidentes en  $v$ . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que el número de aristas azules es  $s \geq R(p - 1, q)$ . Fijémonos en los vértices conectados a  $v$  mediante estas aristas y consideremos el grafo completo formado por  $R(p - 1, q)$  de ellos. Por la definición del número de Ramsey, tendremos o bien un  $K_{p-1}$  azul o bien un  $K_q$  rojo. En el segundo caso ya habríamos terminado, y para el primero basta observar que si añadimos las aristas que conectan los  $p - 1$  vértices con  $v$  (todas azules) tendremos un  $K_p$  monocromático azul. Análogamente se tiene para  $h \geq R(p, q - 1)$ .

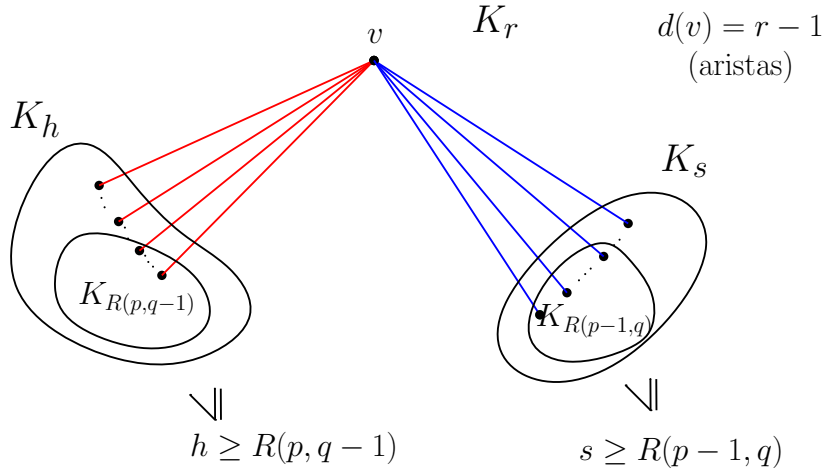


Figura 2.1

2. Supongamos que  $R(p - 1, q) = 2m$  y  $R(p, q - 1) = 2l$ . Sea  $n = 2m + 2l - 1$  y consideremos un grafo 2-coloreado  $K_n$ . De un cierto vértice fijo  $v$  parten  $2m + 2l - 2$  aristas,  $n_1$  azules y  $n_2$  rojas. Caben 3 posibilidades:
  - a)  $n_1 \geq 2m$
  - b)  $n_2 \geq 2l$

$$c) \ n_1 = 2m - 1 \text{ y } n_2 = 2l - 1$$

En los casos (a) y (b), un razonamiento similar al hecho en (1) lleva a que

$$R(p, q) \leq n = 2m + 2l - 1 < 2m + 2l$$

como se quería probar. Y el caso (c) no puede ocurrir para todos los vértices de  $K_n$ , pues en tal caso habría un total de  $(2m + 2l - 1)(2m - 1)$  vértices extremos de aristas azules, un número impar, lo que es absurdo según el Lema 1.0.1 porque como estamos contando dos extremos por arista, ese número total de extremos debería ser par. Luego debe haber al menos un vértice en el que se de la posibilidad (a) o la (b).

□

Calculemos a continuación algunos números de Ramsey, de los cuales podemos conocer su valor exacto.

## 2.2. Número de Ramsey $R(3, 3) = 6$

Probemos por doble desigualdad que el valor exacto del número de Ramsey  $R(3, 3)$  es 6.

Veamos que  $R(3, 3) \leq 6$ . Sea una 2-coloración de las aristas de  $K_6$ . Sea el conjunto de vértices  $\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  y elijamos un vértice cualquiera, por ejemplo  $v_1$ . Hay 5 aristas incidentes a  $v_1$  y por lo tanto, haciendo uso del Principio del Palomar **Teorema 1.0.4**, al menos 3 de ellas deben ser del mismo color. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que al menos 3 de estas aristas, que se conectan a los vértices  $v_3, v_5, v_6$  son azules. Si alguna de las aristas  $v_1v_3, v_1v_5, v_1v_6$  también es azul, entonces tenemos un  $K_3$  azul. Si no, entonces esas tres aristas son todas rojas y tenemos un  $K_3$  rojo. Como este argumento funciona para ambos colores, cualquier  $K_6$  con sus aristas coloreadas con dos colores contiene un  $K_3$  monocromático, y por lo tanto  $R(3, 3) \leq 6$ .

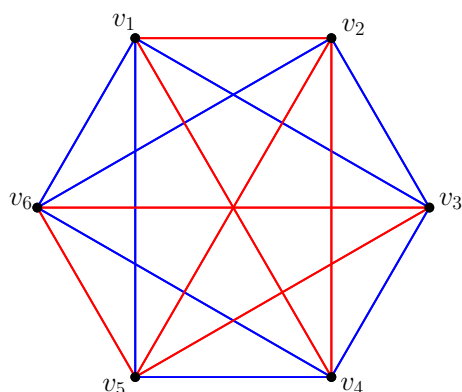


Figura 2.2: En esta 2-coloración de  $K_6$ ,  $v_1v_2v_4$  define un  $K_3$  rojo.

Por el contrario, veamos que  $R(3, 3) \geq 6$ , ya que es posible dar una 2-coloración de las aristas de  $K_5$ , tal como se muestra en la **Figura 2.3** sin crear ningún  $K_3$  monocromático, lo que muestra que  $R(3, 3) > 5$ . Por lo tanto,  $R(3, 3) = 6$ .

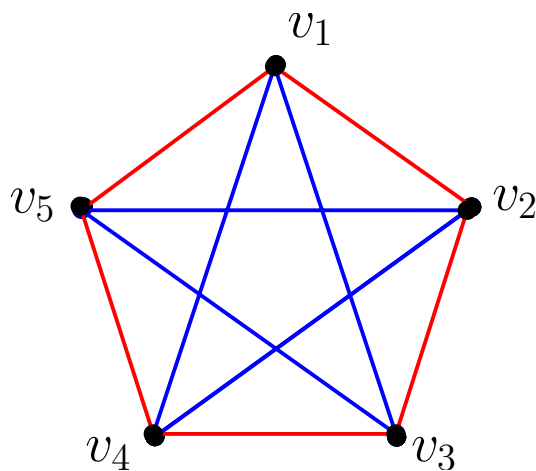


Figura 2.3: Coloreo de  $K_5$  sin triángulos monocromáticos.

En consecuencia, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.2.1.** *El número de Ramsey  $R(3, 3)$  es igual a 6.*

## 2.3. Número de Ramsey $R(3, 4) = 9$

Probemos por doble desigualdad que el valor exacto del número de Ramsey  $R(3, 4)$  es 9.

Probemos que  $R(3, 4) \geq 9$ ,

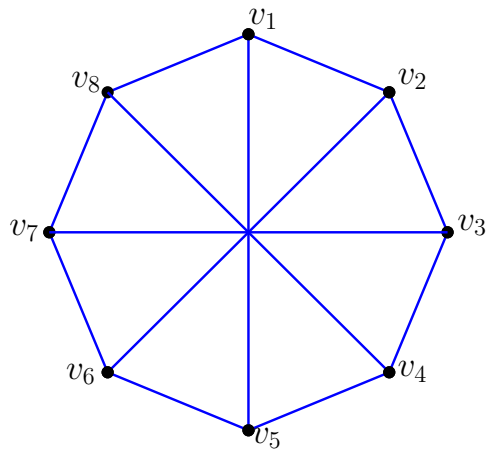
$$R(p, q) = R(3, 4)$$

$$R(p-1, q) = R(2, 4) = 4 \quad (\text{Proposición 2.1.1})$$

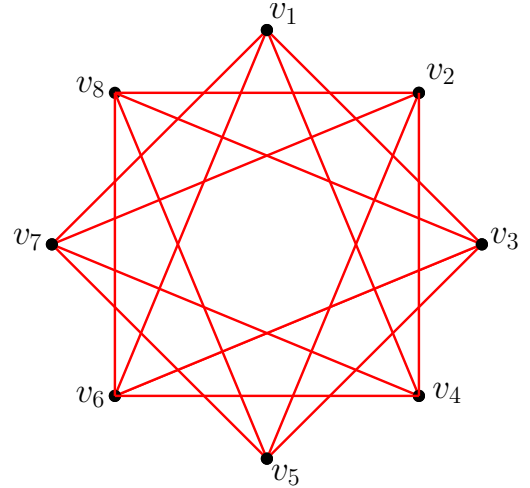
$$R(p, q-1) = R(3, 3) = 6 \quad (\text{Proposición 2.1.1 y Teorema 2.2.1})$$

$$\Rightarrow R(3, 4) < \underbrace{R(2, 4) + R(3, 3)}_{\text{Teorema 2.1.2}} = 4 + 6 = 10 \Rightarrow R(3, 4) \leq 9$$

Veamos que  $R(3, 4) > 8$ , exhibiendo un grafo de 8 vértices que no contenga ningún  $K_3$  azul como subgrafo y cuyo complementario no contenga ningún  $K_4$  rojo como subgrafo. (Véase la Definición 2.0.2 )



Grafo  $G$



Grafo complementario  $\bar{G}$

Figura 2.4:  $G$  y  $\bar{G}$ , con 8 vértices, tal que  $G$  no contiene  $K_3$  como subgrafo y  $\bar{G}$  no contiene  $K_4$  como subgrafo.

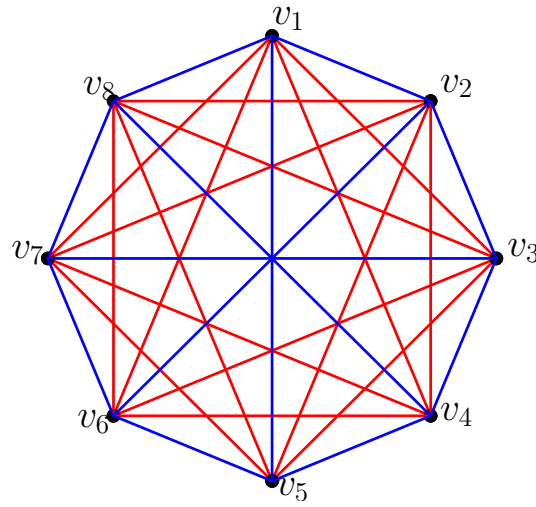


Figura 2.5: Grafo completo  $K_8 = G \cup \bar{G}$ , sin un  $K_3$  azul ni un  $K_4$  rojo como subgrafos.

En este caso, debido a la simetría del grafo podemos ver que no contiene ningún  $K_3$  ni  $K_4$  como subgrafos respectivamente.

Tomemos un vértice cualquiera del grafo  $G$  de la **Figura 2.4**, como por ejemplo  $v_1$ . Ese vértice está unido entonces con los vértices  $v_2, v_5$  y  $v_8$ . Ahora, si existiera un triángulo debería estar formado por el vértice  $v_1$  y 2 vértices más de entre sus vecinos. Hay  $\binom{3}{2} = 3$  posibilidades:  $\{v_1, v_2, v_5\}$  (el cual no puede ser un triángulo pues no hay una arista entre  $v_2$  y  $v_5$ );  $\{v_1, v_2, v_8\}$  (que no puede ser porque no hay una arista entre  $v_2$  y  $v_8$ ) o el  $\{v_1, v_5, v_8\}$  (que tampoco puede ser porque no hay una arista entre  $v_5$  y  $v_8$ ). Por lo tanto, el grafo  $G$  no contiene ningún  $K_3$  como subgrafo. Ahora veamos que el complementario de  $G$ ,  $\bar{G}$ , no contiene a  $K_4$  como subgrafo: el vértice  $v_1$  está unido con los vértices  $v_3, v_4, v_6$  y  $v_7$ . Por lo tanto las posibilidades de que haya un  $K_4$  que incluya al vértice  $v_1$  son  $\binom{4}{3} = 4$ . El hecho de que haya una arista entre  $v_3$  y  $v_4$ , implica que  $\{v_1, v_3, v_4, v_7\}$  y  $\{v_1, v_3, v_4, v_6\}$  no pueden ser  $K_4$ , y el hecho de que exista una arista entre  $v_6$  y  $v_7$  implica que  $\{v_1, v_3, v_6, v_7\}$  y  $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$  tampoco pueden serlo. Luego el grafo  $\bar{G}$  tampoco contiene ningún  $K_4$ .

En consecuencia, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.3.1.** *El número de Ramsey  $R(3,4)$  es igual a 9.*



## 2.4. Número de Ramsey $R(3, 5) = 14$

Probemos por doble desigualdad que el valor exacto del número de Ramsey  $R(3, 5)$  es 14.

Veamos que  $R(3, 5) \leq 14$ ,

$$R(p, q) = R(3, 5)$$

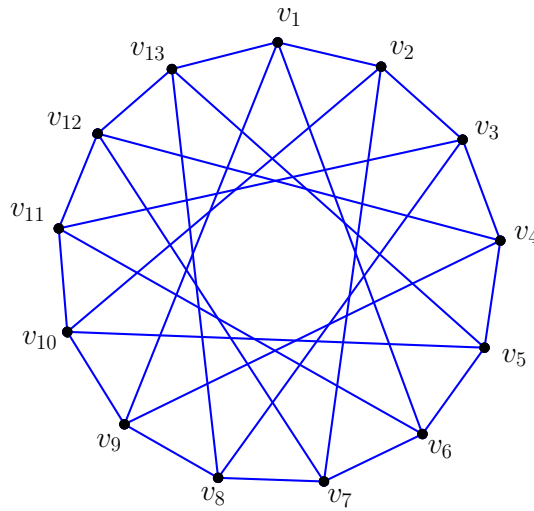
$$R(p-1, l) = R(2, 5) = 5 \text{ (Teorema 2.1.2)}$$

$$R(p, q-1) = R(3, 4) = 9 \text{ (Teorema 2.3.1)}$$

luego deducimos que:

$$R(3, 5) \leq R(2, 5) + R(3, 4) = (5 + 9) = 14$$

Para demostrar que 14 es también cota inferior de  $R(3, 5)$ , basta dar una 2-coloración de las aristas de  $K_{13}$  en la que no aparezca  $K_3$  azul ni  $K_5$  rojo. Para hacer la figura más clara, representamos en un Grafo  $G$  sólo las aristas del color azul (**Figura 2.6**) y observamos que no aparecen triángulos azules. Por otra parte, representamos el grafo complementario  $\bar{G}$  (**Figura 2.7**) que tendrá todas las aristas rojas y observamos que no contiene a  $K_5$  como subgrafo obteniendo así el resultado deseado.



Grafo  $G$

Figura 2.6:  $G$  no contiene ningún  $K_3$  como subgrafo azul.

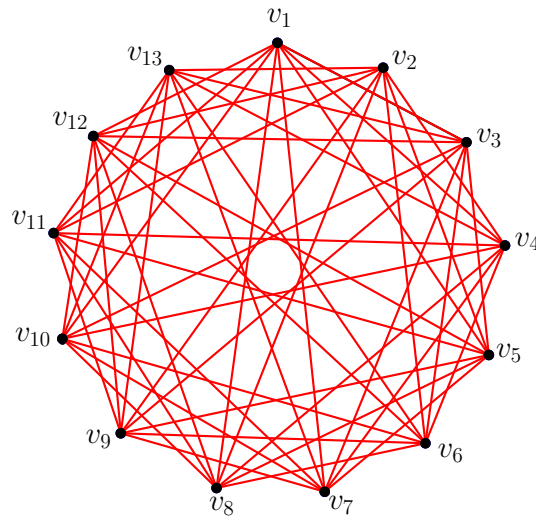
Grafo complementario  $\bar{G}$ 

Figura 2.7:  $\bar{G}$  no contiene ningún  $K_5$  como subgrafo rojo.

En consecuencia, se tiene el siguiente resultado

**Teorema 2.4.1.** *El número de Ramsey  $R(3,5)$  es igual a 14.*

A continuación, mostramos una tabla que recoge algunos de los valores conocidos hasta el momento en [12].

p,q	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1									
2	1	2								
3	1	3	6							
4	1	4	9	18						
5	1	5	14	25	43-49					
6	1	6	18	35-41	58-87	102-165				
7	1	7	23	49-61	80-143	111-298	205-540			
8	1	8	28	56-84	101-216	127-495	216-1031	282-1870		
9	1	9	36	69-115	121-316	169-780	232-1713	317-3583	565-6588	
10	1	10	40-43	92-149	141-442	178-1171	289-2826	331-6090	581-12677	798-23556
11	1	11 46-51	97-191	157	253	405				
12	1	12 52-59	128-238	181	262	416				
13	1	13 59-69	133-291	205	317	511	817			
14	1	14 66-78	141-349	233						
15	1	15 73-88	153-417	261	401		861		1265	

Cuadro 2.1: Tabla de cotas de los números de Ramsey.

**Nota 1.** Esta tabla recoge los valores conocidos hasta el momento. En los casos en los que se desconoce el valor exacto del número de Ramsey, la tabla recoge las cotas entre las que se sabe con seguridad que se encuentra (por ejemplo,  $R(5, 5)$  está entre 43 y 49).

Por la **Proposición 2.1.1** sabemos que  $R(p, q) = R(q, p)$ , luego hay una simetría trivial con respecto la diagonal.

## 2.5. Número de Ramsey $R(3,3,3)=17$

$R(3, 3, 3)$  es el único número de Ramsey no trivial, que usa 3 colores, para el que se conoce su valor exacto.

Supongamos que tenemos una 3-coloración (azul, rojo, verde) de aristas de un grafo completo de  $n$  vértices y que la coloración de aristas no tiene triángulos monocromáticos.

Para el siguiente razonamiento, tomaremos como referencia la **Figura 2.8**.

Escogemos un vértice  $v$  y consideremos el conjunto de vértices que tienen una arista azul incidente con dicho vértice, al cual denotaremos  $C_a$ . Dichos vértices no pueden definir ninguna arista azul, ya que de lo contrario habría un triángulo azul formado por los dos vértices finales de esa arista azul y el vértice  $v$ . Por tanto, la coloración de aristas inducida en el conjunto  $C_a$  de  $v$  tiene aristas coloreadas con solo dos colores (rojo y verde). Dado que  $R(3, 3) = 6$ , el conjunto  $C_a$  de  $v$  puede contener como máximo 5 vértices. Del mismo modo, los conjuntos  $C_r$  (conjunto de vértices que tienen una arista roja incidente con el vértice  $v$ ) y  $C_v$  (conjunto de vértices que tienen una arista verde incidente con el vértice  $v$ ) pueden contener como máximo 5 vértices cada uno. Como cada vértice de  $K_n$  excepto  $v$ , se encuentra en uno de los conjuntos azul, rojo o verde de  $v$ , para que  $K_n$  no contenga triángulo monocromático,  $n$  debe ser menor o igual que 16, luego el grafo completo puede tener como máximo  $1 + 5 + 5 + 5 = 16$  vértices. Por lo tanto, tenemos  $R(3, 3, 3) \leq 17$ .

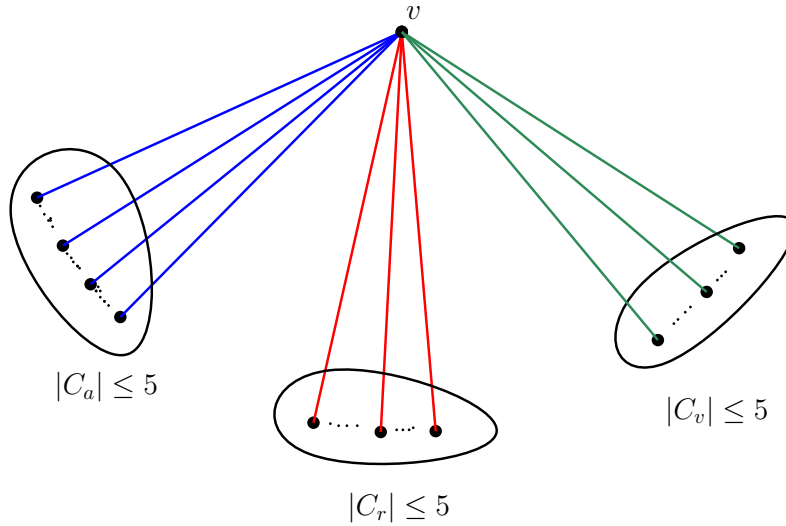


Figura 2.8

Para ver que  $R(3, 3, 3) \geq 17$ , basta con dar una 3-coloración de aristas en el grafo completo en 16 vértices que evite triángulos monocromáticos. Como por ejemplo la **Figura 2.9**, la cual desglosamos en otras tres separadas por colores para verlo con más claridad.

Por tanto  $R(3, 3, 3) = 17$

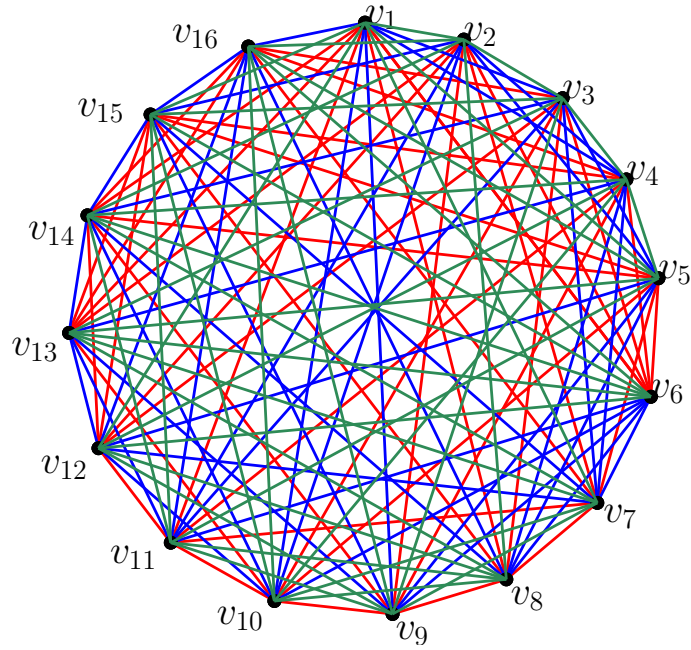


Figura 2.9:  $G = K_{16}$  con una 3-coloración de aristas sin triángulos monocromáticos.

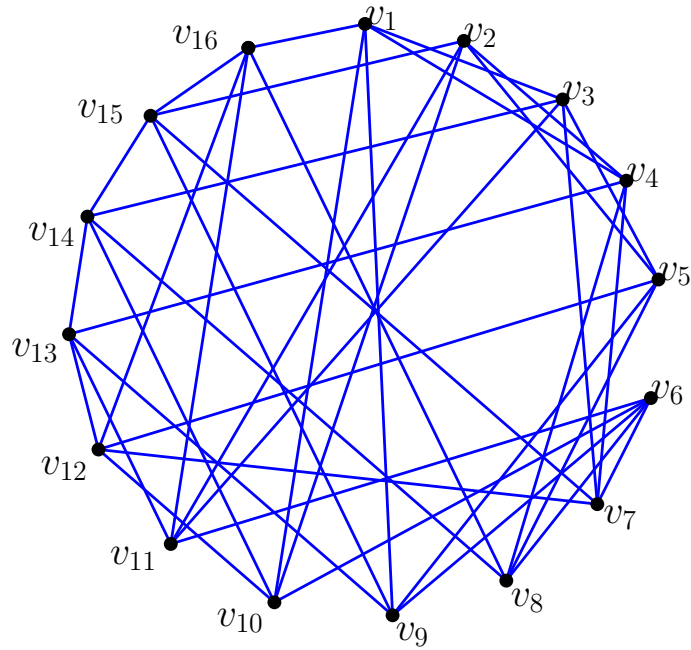


Figura 2.10: Subgrafo de aristas azules que no contiene ningún  $K_3$ .

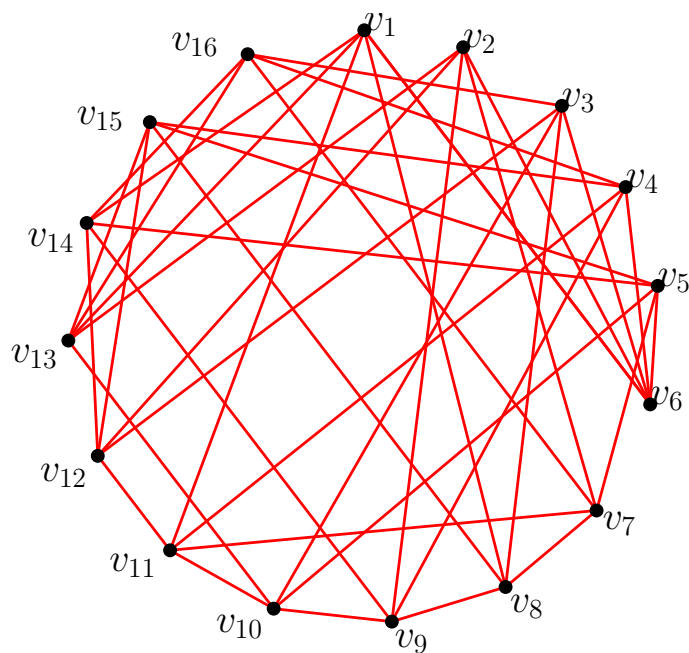


Figura 2.11: Subgrafo de aristas rojas que no contiene ningún  $K_3$ .

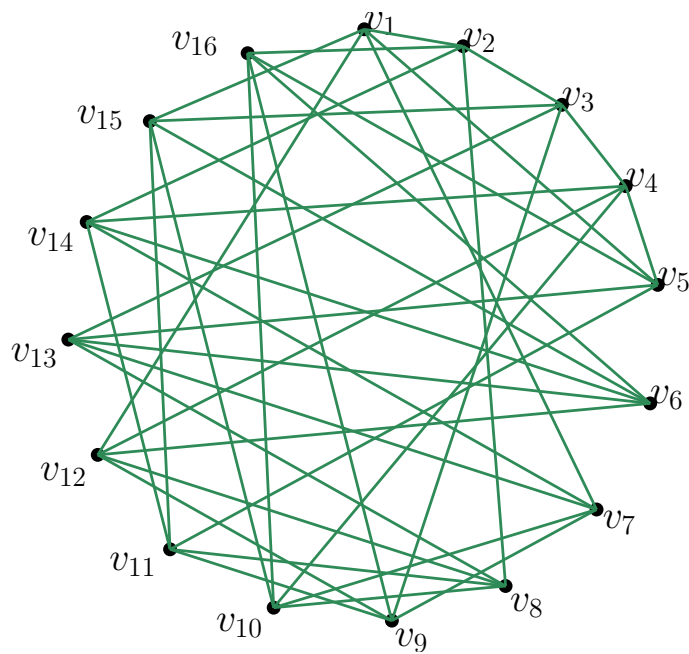


Figura 2.12: Subgrafo de aristas verdes que no contiene ningún  $K_3$ .

## Capítulo 3

### Versiones del Teorema de Ramsey

En este capítulo veremos la versión original del propio Ramsey siguiendo [13], el Teorema de Ramsey demostrado por Erdős y Szekeres siguiendo [7] y el Teorema de Ramsey demostrado por Diestel siguiendo [6].

La primera vez que aparece el Teorema de Ramsey es en el contexto de un problema de la Lógica Formal. Ramsey introduce el teorema para el caso finito como herramientas para poder demostrar dicho problema. En años posteriores, se ha ido descubriendo el interés y las numerosas posibilidades de aplicación de estos resultados de Ramsey fuera del ámbito estricto de la Lógica.

#### 3.1. Versión original del Teorema de Ramsey

Según se recoge en [13], uno de los primeros enunciados de Ramsey se formula, en su versión más general, para una familia infinita y hace uso del Axioma de elección, el cual incluimos a continuación.

**Definición 3.1.1.** Dada  $F$  una familia de conjuntos no vacíos, una función  $g$  es una **función de elección** para  $F$  si  $\text{dom}(g) = F$  y para cada  $X \in F$   $g(X) \in X$ .

**Axioma de elección:** Toda familia de conjuntos no vacíos tiene una función de elección.

A continuación enunciamos el Teorema de Ramsey para clase infinita ([13]).

**Teorema 3.1.2.** Sean  $\Gamma$  una clase infinita,  $\mu$  y  $r$  enteros positivos; y sean todas las  $r$ -combinaciones de miembros de  $\Gamma$  divididas en  $\mu$  clases mutuamente excluyentes  $C_i$  ( $i = 1, 2, \dots, \mu$ ), tales que cada  $r$ -combinación es miembro de una y solo una  $C_i$ ; entonces, asumiendo el axioma de elección,  $\Gamma$  debe contener una subclase  $\Delta$

*infinita tal que todas las  $r$ -combinaciones de los miembros de  $\Delta$  pertenezcan a la misma  $C_i$ .*

Una vez visto el enunciado para una clase infinita, podemos enunciarlo para una clase finita.

**Teorema 3.1.3.** *Dados cualesquiera  $r$ ,  $n$ , y  $\mu$  enteros positivos, podemos encontrar un  $m_0$  tal que, si  $m \geq m_0$  y las  $r$ -combinaciones de una clase de  $m$  elementos  $\Gamma_m$  se dividen de cualquier manera en  $\mu$  clases mutuamente excluyentes  $C_i$  ( $i=1,2,\dots,\mu$ ), entonces  $\Gamma_m$  debe contener una subclase de  $n$  elementos  $\Delta_n$  tal que todas las  $r$ -combinaciones de miembros de  $\Delta_n$  pertenecen a la misma  $C_i$ .*

## 3.2. Prueba del Teorema de Ramsey según Erdős y Szekeres

Pocos años después de la aparición del trabajo de Ramsey, Erdős y Szekeres en [7] dan una versión alternativa y equivalente del **Teorema 3.1.3** para el caso particular en que  $\mu = 2$ . Así mismo enuncian por primera vez el Teorema de Ramsey usando términos de la Teoría de Grafos. En esta sección recogemos dichos resultados.

**Teorema 3.2.1.** *Dados los enteros positivos  $k$ ,  $l$ ,  $i$ , con  $k \geq i$ ;  $l \geq i$ . Supongamos que existen dos clases,  $\alpha$  y  $\beta$ , de  $i$ -combinaciones de  $m$  elementos tal que cada  $k$ -combinación contiene al menos una combinación de clase  $\alpha$  y cada  $l$ -combinación contiene al menos una combinación de clase  $\beta$ . Entonces para un  $m$  suficientemente grande  $m < m_i(k, l)$  no es posible. En otras palabras, si los miembros de la clase  $\alpha$  han sido determinados como arriba y  $m \geq m_i(k, l)$ , entonces debe haber al menos una  $l$ -combinación con todas sus  $i$ -combinaciones de clase  $\alpha$ .*

*Demostración.* Veamos la demostración dividida en 3 casos atendiendo a los valores de  $i$ ,  $k$ ,  $l$ :

a) Si  $i = 1$ , el teorema se verifica para cada  $k$  y  $l$ . Porque si seleccionamos de  $m$  ciertos elementos determinados (combinaciones de orden 1) como la clase  $\alpha$ , de modo que cada  $k$ -combinación debe contener al menos uno de los elementos de la clase  $\alpha$ , hay a lo sumo  $(k - 1)$  elementos que no pertenecen a la clase  $\alpha$ , luego están en la clase  $\beta$ . Entonces debe haber al menos  $(m - k + 1)$  elementos de  $\alpha$ . Si  $(m - k + 1) \geq l$  entonces debe haber una  $l$ -combinación de los elementos de la clase  $\alpha$ ; pero por hipótesis toda  $l$ -combinación contiene elementos de la clase  $\beta$ , llegando a contradicción y entonces  $(m - k + 1) < l$ , luego tenemos que



$$m \leq k + l - 2$$

lo cual es falso para  $m$  suficientemente grande.

Supongamos entonces que  $i > 1$

b) El teorema es trivial si  $k$  o  $l$  es igual a  $i$ . Si, por ejemplo,  $k = i$ , entonces es suficiente elegir  $m = l$ .

Para  $k = i$  significa que toda  $i$ -combinación es de clase  $\alpha$  y por tanto en virtud de  $m = l$  hay una combinación (es decir, la  $l$ -combinación formada por todos los elementos), cuyas  $i$ -combinaciones son todas  $\alpha$ -combinaciones.

El argumento para  $l = i$  funciona de manera similar y por tanto  $m = k$ .

c) Supongamos finalmente que  $k > i$ ; y supongamos que el teorema se verifica para  $(i - 1)$  y cada  $k$  y  $l$ , además para la terna  $(i, k, l - 1)$  y la terna  $(i, k - 1, l)$ . Demostraremos que se verificará también para la terna  $(i, k, l)$  y en virtud de (a) y (b) diremos que el teorema es cierto para todo  $i, k, l$ .

Supongamos entonces que somos capaces de llevar a cabo la división de las  $i$ -combinaciones en dos clases, alfa y beta. Además sea  $k'$  tan grande que si en cada  $l$ -combinación de  $k'$  elementos hay al menos una  $i$ -combinación  $\beta$ , entonces hay una  $(k - 1)$ -combinación cuyas  $i$ -combinaciones son combinaciones  $\beta$ . Esta elección de  $k'$  es siempre posible en virtud de la hipótesis de inducción, solo tenemos que elegir  $k' = m_i(k - 1, l)$ .

De manera similar elegimos  $l'$  tan grande que si cada  $k$ -combinación de  $l'$  elementos contiene al menos una combinación  $\alpha$ , entonces hay  $(l - 1)$ -combinaciones cuyas  $i$ -combinaciones son combinaciones  $\alpha$ .

Entonces para  $m$  mayor que  $k'$  y  $l'$  sea

$$(a_1, a_2, \dots, a_{k'}) \equiv A$$

una  $k'$ -combinación arbitraria de los primeros  $(n - 1)$  elementos. Por hipótesis cada  $l$ -combinación contiene al menos una combinación  $\beta$ , por tanto, debido a la elección de  $k'$ ,  $A$  contiene una  $(k - 1)$ -combinación  $(a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_{k-1}})$  cuyas  $i$ -combinaciones pertenecen a la clase  $\beta$ . Ya que en  $(a_{m_1}, a_{m_2}, \dots, a_{m_{k-1}}, n)$  hay al menos una combinación  $\alpha$ , está claro que esta debe ser una de las  $i$ -combinaciones

$$(a_{p_1}, a_{p_2}, \dots, a_{p_{i-1}}, n) \equiv B$$

De la misma manera, podemos probar reemplazando los papeles de  $k$  y  $l$  por  $k'$  y  $l'$  y de  $\alpha$  por  $\beta$  tal que si

$$(b_1, b_2, \dots, b_{l'}) \equiv A'$$

es una  $l'$ -combinación arbitraria de los primeros  $(n - 1)$  elementos, entonces entre las  $i$ -combinaciones

$$(b_{r_1}, b_{r_2}, \dots, b_{r_{i-1}}, n) \equiv B'$$

debe haber una combinación  $\beta$ .

Por tanto podemos dividir las  $(i - 1)$ -combinaciones de los primeros  $(n - 1)$  elementos en clases  $\alpha'$  y  $\beta'$ , para que cada  $k'$ -combinación  $A$  contenga al menos una combinación  $\alpha'$   $B$  y cada  $l'$ -combinación  $A'$  contenga al menos una combinación  $\beta'$   $B'$ . Pero, por la hipótesis de inducción esto es imposible para  $m \geq m_{i-1}(k', l') + 1$ .

Siguiendo la inducción, obtenemos para  $m_i(k, l)$  la siguiente ecuación funcional

$$m_i(k, l) = m_{i-1}(m_i(k - 1, l), m_i(k, l - 1)) + 1 \quad (3.1)$$

Por esta fórmula de recurrencia y de los apartados a) y b)

$$\begin{cases} m_1(k, l) = k + l - 1 \\ m_i(i, l) = l, m_i(k, i) = k \end{cases} \quad (3.2)$$

obtenido de (a) y de (b) podemos calcular cada  $m_i(k, l)$ .

Obtenemos por ejemplo

$$m_2(k + 1, l + 1) = \binom{k + l}{k} \quad (3.3)$$

□

Finalmente para el caso especial  $i = 2$ , Erdős y Szekeres, en [7], dan una formulación aplicada a la Teoría de Grafos del Teorema de Ramsey para el caso particular de 2-combinaciones y 2 colores (véase **Definición 2.0.2**) y presentamos una prueba muy simple también extraída de [6].

**Teorema 3.2.2.** *En un grafo arbitrario, sea el máximo número de vértices independientes  $k$ , si el número de vértices es  $N \geq m(k, l)$  entonces en nuestro grafo existe un subgrafo completo de orden  $l$ .*

*Demostración.* Para  $l = 1$ , el teorema es trivial para cualquier  $k$ , ya que el máximo número de vértices independientes es  $k$  y si el número de vértices es  $(k + 1)$ , debe haber una arista (grafo completo de orden 2).

Ahora supongamos probado el teorema para  $(l - 1)$  con cualquier  $k$ . Luego al menos  $\frac{N-k}{k}$  aristas parten desde uno de los vértices independientes.

Por lo tanto si

$$\frac{N - k}{k} \geq m(k, l - 1), \quad (3.4)$$

es decir,

$$N \geq k \cdot m(k, l - 1) + k \quad (3.5)$$

entonces, además de los vértices finales de estas aristas podemos seleccionar, en virtud de nuestra hipótesis de inducción, un grafo completo cuyo orden es al menos  $(l - 1)$ . Como los vértices de este grafo están conectados con los mismos vértices, forman juntos un grafo completo de orden  $l$ .

□

### 3.3. Prueba del Teorema de Ramsey según Diestel

Por último veamos la prueba del Teorema de Ramsey según Diestel en [6].

Sea  $G$  un grafo suficientemente grande que debe contener un  $K_r$  o  $\bar{K}_r$  como subgrafo inducido. Diestel construyó un  $K_r$  o  $\bar{K}_r$  en  $G$  inductivamente, comenzando con un vértice arbitrario  $v_1 \in V_1 := V(G)$ . Si  $|G|$  es grande, habrá un gran conjunto  $V_2 \subseteq V_1 - \{v_1\}$  de vértices que son todos adyacentes a  $v_1$  o todos no adyacentes a  $v_1$ . En consecuencia podemos pensar en  $v_1$  como el primer vértice de un  $K_r$  o  $\bar{K}_r$ , cuyos otros vértices se encuentran en  $V_2$ . Eligió otro vértice  $v_2 \in V_2$  para los subgrafos  $K_r$  o  $\bar{K}_r$ . Como  $V_2$  es grande, tendrá un subconjunto  $V_3$ , aún bastante grande de vértices que son todos "del mismo tipo" con respecto a  $v_2$ : bien todos adyacentes o todos no adyacentes a  $v_2$ . Luego continúa la búsqueda de vértices dentro de  $V_3$ , y así sucesivamente (**Figura 3.1**)

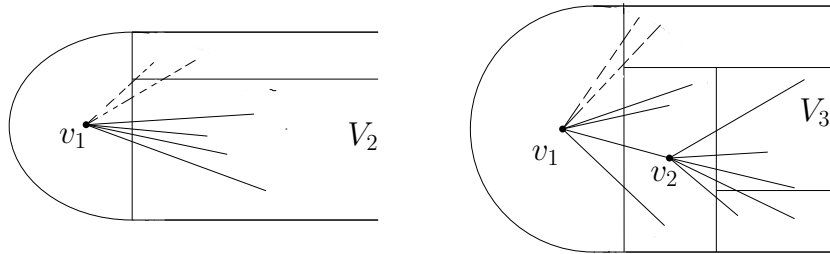


Figura 3.1: Esquema para elegir la secuencia  $v_1, v_2, \dots$  del Teorema 3.3.1

Pero, ¿cuánto tiempo se puede seguir de esta manera.? Esto depende del tamaño del conjunto inicial  $V_1$ : cada conjunto  $V_i$  tiene al menos la mitad del tamaño de su predecesor  $V_{i-1}$ , por lo que podremos completar los pasos de construcción si  $G$  tiene orden de  $2^s$ . Como muestra la siguiente prueba, la elección de  $s = 2r - 3$  vértices  $v_i$  es suficiente para encontrar entre ellos los vértices de un  $K_r$  o  $\bar{K}_r$ .

**Teorema 3.3.1.** *Para cada  $r \in \mathbb{N}$  existe un  $n \in \mathbb{N}$  tal que cada grafo de orden al menos  $n$  contiene  $K_r$  o  $\bar{K}_r$  como un subgrafo inducido.*

*Demostración.* La prueba es trivial para  $r \leq 1$ , ya que el menor grafo inducido es un vértice; por tanto supongamos que  $r \geq 2$ . Dado  $n := 2^{2r-3}$  y sea  $G$  un grafo de orden al menos  $n$ , definimos una secuencia  $V_1, \dots, V_{2r-2}$  de conjuntos y elegimos unos vértices  $v_i \in V_i$  con las siguientes propiedades:

1.  $|V_i| = 2^{2r-2-i}$  ( $i = 1, \dots, 2r - 2$ );
2.  $V_i \subseteq V_{i-1} - \{v_{i-1}\}$  ( $i = 2, \dots, 2r - 2$ );
3.  $v_{i-1}$  es adyacente a todos los vértices en  $V_i$  o bien no es adyacente a ningún vértice en  $V_i$  ( $i = 2, \dots, 2r - 2$ ).

Sea  $V_1 \subseteq V(G)$  cualquier conjunto de  $2^{2r-3}$  vértices y sea  $v_1 \in V_1$  arbitrario. Entonces (1) se verifica para  $i = 1$ , mientras que (2) y (3) se verifica trivialmente. Supongamos ahora que  $V_{i-1}$  y  $v_{i-1} \in V_{i-1}$  ha sido elegido así para satisfacer (1)-(3) para  $(i - 1)$ , donde  $1 < i \leq 2r - 2$ . Dado que

$$|V_{i-1} - \{v_{i-1}\}| = 2^{2r-1-i} - 1$$

es impar,  $V_{i-1}$  tiene un subconjunto satisfaciendo (1)-(3); sea  $v_i \in V_i$  arbitrario.

Entre los  $2r - 3$  vértices,  $v_1, \dots, v_{2r-3}$ , hay  $r - 1$  vértices que se comportan igual que cuando son vistos como  $v_{i-1}$  en (3), siendo adyacente a todos los vértices en  $V_i$  o a ninguno. En consecuencia, los  $r - 1$  vértices y  $v_{2r-2}$  inducen un  $K_r$  o un  $\bar{K}_r$  en  $G$ , porque  $v_i, \dots, v_{2r-2} \in V_i$  para todo  $i$ .

□

A lo largo de este capítulo, las diferentes versiones de la prueba del Teorema de Ramsey no son todas equivalentes. A diferencia de la versión original, Erdős y Szekeres, al igual que Diestel, presentan su versión usando términos de la Teoría de Grafos.

## Capítulo 4

# Aplicaciones del Teorema de Ramsey

En este capítulo mostraremos algunas de las aplicaciones que tienen los resultados de Ramsey en distintas áreas de las Matemáticas, no sólo en la Teoría de Grafos siguiendo [7], [5] y [8].

Hay muchas aplicaciones del Teorema de Ramsey. En este capítulo hablaremos de algunas de ellas con detalle mostrando ejemplos y otras simplemente las enunciaremos.

### 4.1. Teorema de Erdős y Szekeres sobre los polígonos convexos.

Dedicamos esta sección a mostrar un problema de Geometría del plano que puede resolverse usando el Teorema de Ramsey en su versión combinatoria para dos colores (Teorema 3.2.1). Para ser fieles a la Historia, destacamos que fue Esther Klein quien en 1933 resolvió el siguiente problema para, posteriormente, sugerir su generalización, que será resuelta por Erdős y Szekeres en [7].

Recordemos que un conjunto  $C$  de puntos en el plano se halla en **posición general**, si cualesquiera tres puntos de dicho conjunto no se encuentran sobre una misma línea recta.

**Problema 1.** *Probar que en cualquier configuración de 5 puntos en el plano en posición general, siempre pueden hallarse 4 que constituyen los vértices de un cuadrilátero convexo.*

E. Klein resolvió este problema analizando las posibles configuraciones de los 5 puntos. Si el cierre convexo de los puntos es un pentágono o un cuadrilátero, el resultado es evidente, ya que en el primer caso cualquier conjunto de 4 puntos

determinan un cuadrilátero convexo, y en el segundo el cuadrilátero convexo está determinado por los puntos que forman el cierre convexo.

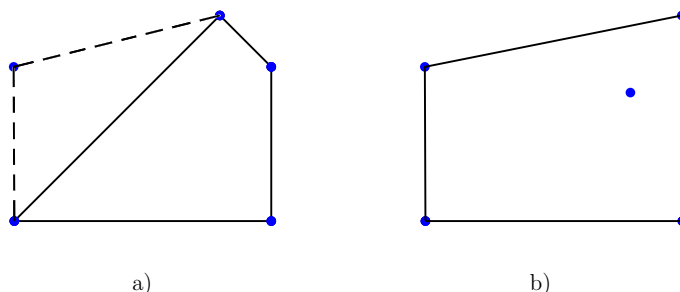


Figura 4.1: En a) cualquier subconjunto de 4 puntos determinan un cuadrilátero convexo. En b) el cuadrilátero convexo está dado por el polígono del cierre convexo.

Por último cuando el polígono del cierre convexo es un triángulo, los dos puntos interiores, junto con los dos puntos que quedan del mismo lado de la recta que los une, forman el cuadrilátero convexo (véase la figura 4.2 b) ).

En [7], Erdős y Szekeres mencionan que después de dar solución a este problema, E. Klein sugiere la siguiente generalización:

**Problema 2.** *¿Es posible encontrar para cada entero  $n \geq 3$ , un mínimo entero  $N(n)$ , tal que cualquier configuración de  $N(n)$  puntos en el plano en posición general, contenga  $n$  que formen un polígono convexo?*

Erdős y Szekeres dieron respuesta positiva a este problema y su solución constituye uno de los acontecimientos más importantes dentro de la Matemática Discreta, ya que su artículo [7] impulsó el desarrollo de la Teoría de Ramsey, la cual brinda solución a múltiples problemas. Seguidamente se expone una solución al problema de Erdős-Szekeres (que es como se conoce al **Problema 2**), la cual depende del Teorema de Ramsey y nos permite acotar el valor de  $N(n)$  mediante ciertos números de Ramsey.

Recordemos que dado  $X$  un subconjunto de puntos en el plano en posición general, diremos que  $x_1, \dots, x_n \in X$  se hallan en **posición convexa**, si  $x_1, \dots, x_n$  constituyen los vértices de un polígono convexo.

**Teorema 4.1.1.** *Para cada entero  $n \geq 3$  existe un mínimo entero  $ES(n)$ , tal que en cualquier configuración en el plano de  $N(n)$  puntos en posición general,  $n$  de ellos se hallan en posición convexa.*

#### 4.1. TEOREMA DE ERDÖS Y SZEKERES SOBRE LOS POLÍGONOS CONVEXOS.47

En el **Problema 1** hemos probado que de 5 puntos siempre es posible seleccionar 4 formando un cuadrilátero convexo. Con este resultado probamos por inducción la siguiente proposición, la cual usaremos en la demostración del **Teorema 4.1.1**.

**Proposición 4.1.2.**  *$n$  puntos determinan un polígono convexo si y solo si 4 puntos de ellos forman un cuadrilátero convexo.*

*Demostración.* Si  $n = 5$  por el **Problema 1** sabemos que en cualquier configuración de 5 puntos en el plano en posición general, siempre pueden hallarse 4 puntos que constituyen los vértices de un cuadrilátero convexo. Luego los 5 puntos dados determinan un polígono convexo.

Supongámoslo cierto para  $n$ .

Y probemoslo para  $n + 1$ . Como para  $n$  puntos hemos encontrado 4 de ellos que forman un cuadrilátero convexo, se tiene que dicho cuadrilátero se encuentra dentro de los  $n + 1$  puntos, por tanto, estos  $n + 1$  puntos determinan un polígono convexo.  $\square$

Una vez probada la **Proposición 4.1.2**, veamos la demostración del **Teorema 4.1.1**.

*Demostración.* Denotemos los puntos dados por los números  $1, 2, \dots, N$ , entonces cualquier  $k$ -combinación de los puntos establecidos se representa por un conjunto de  $k$  de estos números, o como diremos, por una  $k$ -combinación. Supongamos que cada  $n$ -combinación es cóncava, entonces de lo que observamos arriba, podemos dividir las 4 combinaciones en dos clases (es decir, en cuadriláteros convexos y cuadriláteros cóncavos) tal que cada 5-combinación puede contener al menos una combinación convexa y cada  $n$ -combinación contiene al menos una cóncava. (Consideremos una combinación contenida en otra, si cada elemento de la primera también es elemento de la segunda.)  $\square$

**Observación 1.** Erdős y Szekeres en [13] se plantean la siguiente pregunta: ¿podemos encontrar, para un  $n$  dado, un entero  $N(n)$  tal que cualquier conjunto con al menos  $N$  puntos contenga  $n$  puntos formando un polígono convexo?. La respuesta a dicha pregunta se encuentra en el siguiente teorema:

**Teorema 4.1.3.**  $N(n) \leq R(5, n; 4)$ .

*Se puede comprobar que*

$$\begin{aligned} n = 4 \quad N(4) &= 5 = 2^2 + 1, \\ n = 5 \quad N(5) &= 9 = 2^3 + 1. \end{aligned}$$

Erdős y Szekeres conjeturaron que  $N(n) = 2^{n-2} + 1$ , pero el problema no ha sido aclarado hasta donde hemos podido saber.

A manera de ejemplo podemos observar que cualesquiera tres puntos en el plano en posición general determinan los vértices de un triángulo, luego  $N(3) = 3$ . También de la solución al **Problema 1** se tiene que  $N(4) = 5$ .

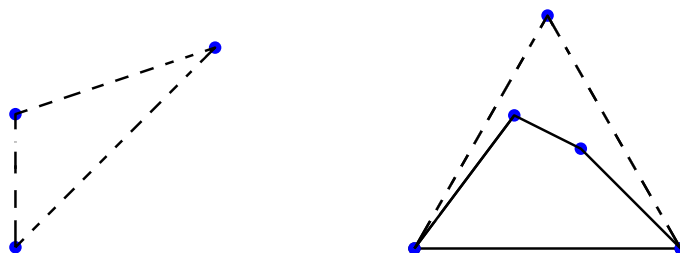


Figura 4.2: En *a*) tres puntos en posición general se hallan en posición convexa. *b*) Cuadrilátero convexo cuando el cierre convexo está determinado por tres puntos. Cinco puntos en posición general siempre contienen cuatro puntos que forman un cuadrilátero convexo.

## 4.2. Teorema de Schur

El teorema de Schur afirma que para cualquier coloración de los números naturales siempre es posible hallar subsucesiones monocromáticas arbitrariamente largas con la propiedad de que el término mayor de la subsucesión es la suma de los que le preceden. Veamos el Teorema de tipo Ramsey que presenta Schur siguiendo [5], pero antes definamos algunos conceptos que usaremos.

Se denomina  **$k$ -coloración de los números naturales** a una aplicación que asigna un color a cada número natural.

$$c : \mathbb{N} \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$$

Los conjuntos  $C_i = c^{-1}(i)$ , para  $i = 1, \dots, k$ , se denominan **clases de coloración de  $c$** .  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  forman una partición de los números naturales.

Una  $k$ -coloración está completamente definida si se conocen las  $k$  clases de coloración  $C_1, C_2, \dots, C_k$ . Por esta razón es habitual referirse a una  $k$ -coloración mediante sus clases de coloración.



**Teorema 4.2.1.** Para cualesquiera enteros positivos  $k, l$  con  $l \geq 2$  existe un número natural  $N(k, l) \in \mathbb{N}$  tal que, si  $n \geq N(k, l)$  y  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  es una  $k$ -coloración de  $\{1, 2, \dots, n\}$ , entonces existe una clase de coloración  $C_t$ , y  $x_1, x_2, \dots, x_l \in \{1, 2, \dots, n\}$  (no necesariamente distintos), tales que

$$\{x_1, x_2, \dots, x_l\} \subset C_t \quad y \quad x_l = \sum_{i=1}^{l-1} x_i \quad (4.1)$$

*Demostración.* Veamos que si  $N(k, l) = R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k-\text{veces}})$ , (donde  $R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k-\text{veces}})$  es el mínimo entero para el que cualquier coloración con esos  $k$  colores (según Definición 2.0.2) se cumple lo especificado en el teorema. En efecto, sea  $n \geq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k-\text{veces}})$  y  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  una  $k$ -coloración de  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Sea  $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$  el conjunto de todos los 2-subconjuntos de  $\{1, 2, \dots, n\}$  y definamos una  $k$ -coloración  $\{A_1, \dots, A_k\}$  de  $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$  como:  $\{x, y\} \in A_i$  si y solo si  $|x - y| \in C_i$ , para cada  $i \in \{1, \dots, k\}$ . Esta  $k$ -coloración de  $P_2(\{1, 2, \dots, n\})$  es válida, pues si se tiene que  $\{x, y\} \in A_i \cap A_j$ , entonces, por definición,  $|x - y| \in C_i$  y  $|x - y| \in C_j$ , como  $\{C_1, C_2, \dots, C_k\}$  es una  $k$ -coloración se tiene que  $i = j$ , luego  $A_i = A_j$ .

Por el Teorema de Ramsey (teorema 3.1.3), existe un  $t \in \{1, 2, \dots, k\}$  y un  $l$ -subconjunto  $U = \{u_1, u_2, \dots, u_l\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$  tal que  $P_2(U) \subset A_t$ . Sin pérdida de generalidad podemos suponer que  $u_1 < u_2 < \dots < u_l$ . Luego  $\{u_i, u_j\} \in A_t$  y  $u_j - u_i \in C_t$  para todo  $i < j$ . Finalmente para  $1 \leq i \leq l - 1$  sea  $x_i = u_{i+1} - u_i$  y  $x_l = u_l - u_1$ . De este modo se tiene que  $x_i \in C_t$  para todo  $1 \leq i \leq l$  y  $x_l = \sum_{i=1}^{l-1} x_i$ .

□

A continuación veamos un ejemplo, pero antes de ello definamos que se entiende por número de Schur.

**Definición 4.2.2.** Se denomina **número de Schur** al valor mínimo que puede tomar  $N(k, l)$  el cual denotaremos como  $N_0(k, l)$ . Así de la demostración del teorema 4.2.1 se sigue que  $N_0(k, l) \leq R(\underbrace{l, l, \dots, l}_{k-\text{veces}})$ .

**Ejemplo 5.**  $N_0(2, 3) = 5$

*Demostración.* Como  $k=2$ , supongamos que los colores son rojo y azul; y sabemos que  $N_0(2, 3) \leq R(3, 3) = 6$ .

Veamos hasta donde podemos llegar coloreando los enteros positivos sin que se cumpla la propiedad (4.1).

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el 1 se ha coloreado de rojo, luego el 2 tiene que ser azul ya que  $2 = 1 + 1$ , análogamente el 4 debe ser rojo pues  $4 = 2 + 2$ ; de esto se sigue que el 3 es azul pues  $4 = 1 + 3$ . Hasta este punto tenemos la siguiente 2-coloración del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$ :

1, 2, 3, 4.

Pero ahora el 5 no puede colorearse sin que se cumpla que es suma monocromática de dos números monocromáticos, pues  $5 = 1 + 4 = 2 + 3$ . De lo anterior se sigue que  $N_0(2, 3) \leq 5$ . Por otra parte, en la coloración: 1, 2, 3, 4 no existen tres enteros con la propiedad (4.1). Por tanto  $N_0(2, 3) > 4$ , y así  $N_0(2, 3) = 5$ .

□

### 4.3. Todo semigrupo finito debe tener un elemento idempotente.

Un **semigrupo finito** es un conjunto finito en el que se define una operación binaria asociativa, que llamaremos producto, la operación es ".". Un elemento  $e$  se dice que es idempotente si se cumple que  $e \cdot e = e$ .

Veamos el siguiente resultado cuya demostración tomamos de [8].

**Teorema 4.3.1.** *Todo semigrupo finito debe tener un elemento idempotente.*

*Demostración.* Para probarlo usando un número de Ramsey, tomemos un elemento cualquiera,  $a$ , del semigrupo. Llamemos  $n$  al número de elementos del conjunto (el orden del semigrupo) y consideremos

$$N = R(\underbrace{3, 3, 3, \dots, 3}_n).$$

Llamemos  $a^t$  al producto ( $t$  veces) del elemento  $a$ . Tomemos ahora el grafo completo  $K_N$  con sus vértices numerados, y coloreemos sus aristas con  $n$  colores (cada color es un elemento del semigrupo) con la siguiente receta: la arista que une los vértices  $i$  y  $j$  ( $i < j$ ) se colorea con  $a^{j-i}$  (el hecho de que sea un semigrupo nos garantiza que cualquier potencia de un elemento pertenece al semigrupo). El Teorema de Ramsey nos dice que debe haber un triángulo monocromático, es decir, deben existir  $i, j, k$  ( $i < j < k$ ) tales que

$$a^{j-i} = a^{k-i} = a^{k-j}.$$

Si llamamos  $e = a^{j-i}$ , teniendo en cuenta que  $a^{k-j} \cdot a^{j-i} = a^{k-i}$ , observamos que se cumple que  $e \cdot e = e$ . Así que éste es el elemento idempotente que buscábamos.

□

## 4.4. Otras aplicaciones

### 4.4.1. Teorema de van der Waerden

Un resultado basado en el teorema de Ramsey es el siguiente teorema sobre progresiones aritméticas:

**Teorema 4.4.1.** *Para todo par de enteros  $l$  y  $r$ , existe un  $n_0$  tal que si  $n \geq n_0$  y coloreamos el conjunto  $\{1, \dots, n\}$  con  $r$  colores, entonces el conjunto contiene una progresión aritmética monocromática de longitud  $l$ ,*

$$a, a + d, \dots, a + (l - 1)d$$

Una prueba de este teorema puede encontrarse en [3].

### 4.4.2. Erdős y Szekeres

**Teorema 4.4.2.** *Si tenemos  $n^2 + 1$  números reales,  $n + 1$  de ellos forman una sucesión monótona.*

Y el resultado es el mejor posible, como podemos observar considerando la sucesión

$$\underbrace{n, n - 1, \dots, 1}_{n \text{ términos}}, \underbrace{2n, \dots, n + 1}_{n \text{ términos}}, \underbrace{n^2, \dots, (n - 1)^2 + 1}_{n \text{ términos}}$$

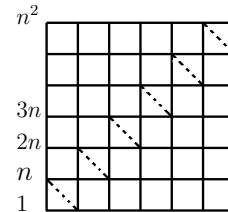


Figura 4.3

La prueba de este resultado la podemos ver en [8].

### 4.4.3. Aplicación de Ramsey para matrices.

**Teorema 4.4.3.** *Sea  $m$  un entero positivo arbitrario. Cualquier matriz cuadrada  $A$  cuyos elementos sean ceros o unos y que tenga un orden  $n$  suficientemente grande contiene una submatriz principal de orden  $m$  de uno de los siguientes cuatro tipos:*

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & * & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & * & 1 & \ddots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & * & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & * & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & * & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & * & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & & * \end{pmatrix}$$

(donde en lugar de asteriscos se permiten ceros y unos sin ninguna restricción).

### 4.4.4. Número de Ramsey de dos colores para ciclos

Un ciclo es un grafo que se asemeja a un polígono de  $n$  lados. Se trata de un camino cerrado en el que solo se repite un vértice dos veces como principio y fin del camino. Un ciclo de  $n$  vértices se denota  $C_n$ . El número de vértices en un grafo  $C_n$  es igual al número de aristas, y cada vértice tiene grado par, por lo tanto cada vértice tiene dos aristas incidentes.

**Teorema 4.4.4.** *Para  $m$  suficientemente grande, todo lo siguiente se verifica.*

- $R(C_m, C_{2p+1}, C_{2q+1}) = 4m - 3$  para  $p \geq 2, p \geq q \geq 1$
- $R(C_m, C_{2p}, C_{2q+1}) = 2(m+p) - 3$
- $R(C_m, C_{2p}, C_{2q}) = m + p + q - 2$  para  $p$  y  $q \geq 1$

Una prueba de este resultado puede encontrarse en [15].

Estas son solo algunas de las aplicaciones de los teoremas de Ramsey. Para tener una visión más amplia podemos consultar [15].



# Bibliografía

- [1] BELLA BOLLOBÁS, *Graph Theory*, Springer-Verlag, 1979.
- [2] FRANCISCO J. CIRRE, *Matemática Discreta*, Anaya, 2004.
- [3] RONALD GRAHAM , BRUCE LEE ROTHCHILD, JOEL SPENCER, *Ramsey Theory*, John Wiley y Sons, 1990.
- [4] JOHN CLARK Y DERECK ALLAN HOLTON, *A first look at graph theory*, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, 1991.
- [5] CÉSAR A. DÍAZ , *Tesis de Licenciatura: Teoría de Ramsey y el Teorema de Erdős-Szekeres*, Universidad Tecnológica de la Mixteca, México, 2013.  
[http://jupiter.utm.mx/~tesis\\_dig/12107.pdf](http://jupiter.utm.mx/~tesis_dig/12107.pdf)
- [6] REINHARD DIESTEL, *Graph Theory*, Springer-Verlag New York 1997, 2000.
- [7] PAUL ERDÖS, GEORGE SZEKERES, *A combinatorial problem in Geometry*, Compositio Mathematica 2, 463-470, 1935.
- [8] PABLO FERNÁNDEZ Y JOSE L. FERNÁNDEZ, *El desorden absoluto es imposible: La Teoría de Ramsey*, La Gaceta, (2), 263-289, 1999.
- [9] EMILIO FERNÁNDEZ Y LUZ RONCAL, *Los números de Ramsey y el álgebra*, Gac. R. Soc. Mat. Esp. 15, 651-674, 2012.  
<https://www.unirioja.es/cu/luroncal/pdf/Ramsey.pdf>
- [10] FÉLIX GARCÍA, *Matemática Discreta*, Thomson Paraninfo, 2005, 2ª ed.
- [11] BRUCE M. LANDMAN Y AARON ROBERTSON, *Ramsey Theory on the Integers*, American Mathematical Society, 2004.
- [12] STANISŁAW P. RADZISZOWSKI, *Small Ramsey Numbers*, Department of Computer Science Rochester Institute of Technology Rochester, NY 14623, 2004.

- [13] FRANK P. RAMSEY, *On a problem of formal logic*, Proceedings of the London Mathematical Society, 1930.
- [14] TATIANA ROMINA, *Tesis de Licenciatura: Números de Ramsey*, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 2013.  
<http://mate.dm.uba.ar/~gduran/docs/tesis/TesisTatianaHartinger.pdf>
- [15] ALEXANDER SOIFER, *Ramsey Theory: Yesterday, Today and Tomorrow*, Birkhäuser, Progress in Mathematics; Volume 285, 2011.
- [16] PANKJ KUMAR, BORIS ARONOV, TIMOTHY M. CHAN Y MISHA SHARIR, *On levels in arrangements of lines, segments, planes and triangles*, Discrete Comput. Geom. 19, 1998, no. 3, 315-331.